

Prova da Desigualdade Triangular: $|z_1 + z_2| = |z_1| + |z_2|$

Lembremos que: $|z|^2 = z \cdot \bar{z}$

Daí temos que:

$$|z_1 + z_2|^2 = (z_1 + z_2)(\overline{z_1 + z_2}) = (z_1 + z_2)(\bar{z}_1 + \bar{z}_2) = z_1 \bar{z}_1 + z_2 \bar{z}_2 + z_1 \bar{z}_2 + z_2 \bar{z}_1$$

$$|z_1 + z_2|^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2 + z_1 \bar{z}_2 + z_2 \bar{z}_1$$

$$|z_1 + z_2|^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2 + z_1 \bar{z}_2 + \overline{z_1 \bar{z}_2}$$

Utilizando a propriedade $\bar{\bar{z}} = z$, teremos:

Lembrando agora que $z + \bar{z} = 2 \operatorname{Re}(z)$ chegaremos a:

Sabemos também que: $x \leq |x| \quad x \in \mathfrak{R}$, logo:

$$|z_1 + z_2|^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2 \operatorname{Re}(z_1 \bar{z}_2)$$

$$|z_1 + z_2|^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2 \operatorname{Re}(z_1 \bar{z}_2) \leq |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2 |z_1 \bar{z}_2|$$

Mas $|\operatorname{Re}(z)| \leq |z|$, daí:

$$|z_1 + z_2|^2 \leq |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2 |\operatorname{Re}(z_1 \bar{z}_2)| \leq |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2 |z_1 \bar{z}_2|$$

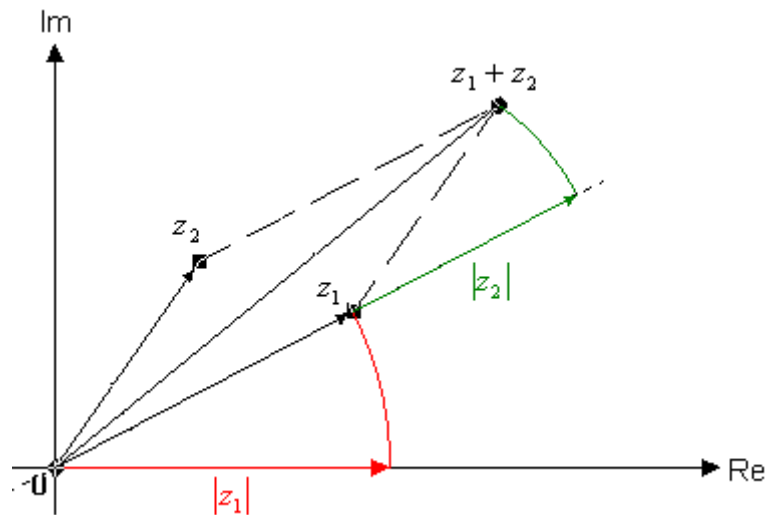
$$|z_1 + z_2|^2 \leq |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2 |z_1| |\bar{z}_2| = |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2 |z_1| |z_2|$$

$$|z_1 + z_2|^2 \leq (|z_1| + |z_2|)^2$$

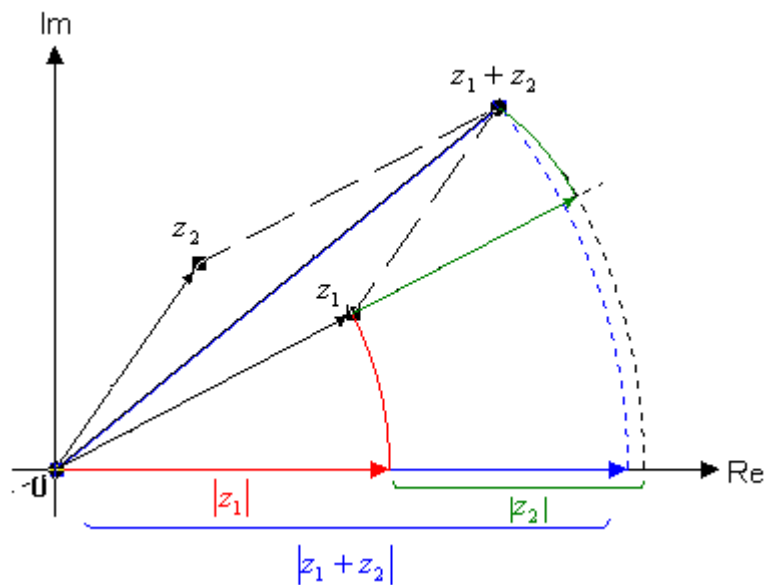
$$\boxed{|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|}$$

Interpretação Geométrica:

Observe na figura abaixo rebatemos $\vec{z}_1$ sobre o eixo real e $\vec{z}_2$ sobre a reta suporte de $\vec{z}_1$, obtendo assim vetores auxiliares, indicados em vermelho e verde, cujos módulos são iguais aos de $\vec{z}_1$ e $\vec{z}_2$ respectivamente:



Procedemos, em seguida, com os rebatimento sobre o eixo real; chegando à figura abaixo:



Percebemos facilmente que $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$, a igualdade; ocorrerá quando $\vec{z}_1$ e $\vec{z}_2$ forem paralelos.

Bibliografia:

Funções de Uma Variável Complexa

Ávila, Geraldo S. S.

Livros Técnicos e Científicos Editora S.A.

Editora Universidade de Brasília

1974