

Universidade Federal da Bahia Instituto de Matemática

Fundamentos de Matemática Elementar IV

Distância de Ponto a Reta

E

Área do Triângulo

Robson Silva de Sousa

Distância de Um Ponto a Uma Reta

Conceitos Preliminares

Forma Geral da Equação de Uma Reta

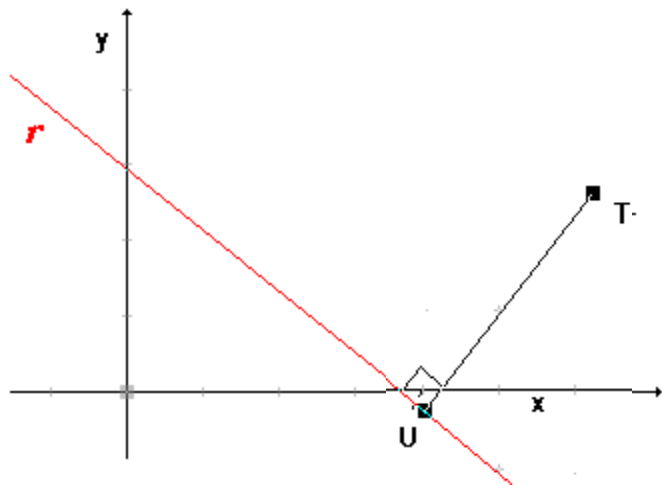
$$Ax + By + C = 0$$

Distância Entre Dois Pontos do Plano

Sendo $P = (x_P, y_P)$ e $Q = (x_Q, y_Q)$ Pontos do Plano a Distância Entre Ele é Dada Por:

$$d_{PQ} = \sqrt{\left(x_P - x_Q\right)^2 + \left(y_P - y_Q\right)^2}$$

Distância de Um Ponto a Uma Reta



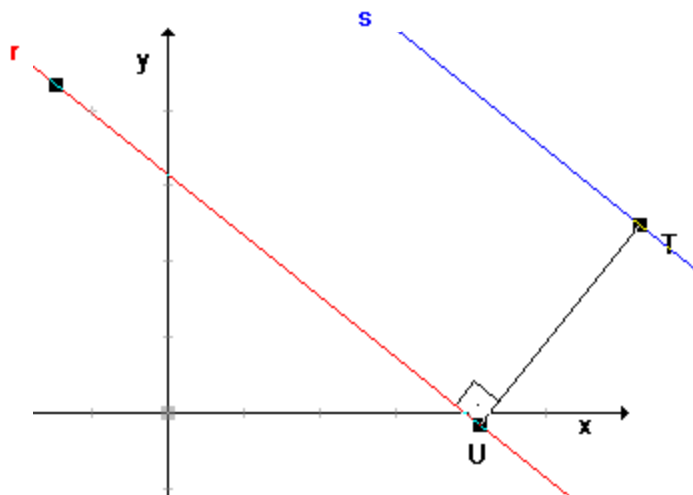
Consideremos uma reta r , cuja equação é:

$$ax + by + c = 0$$

e um ponto $T = (x_0, y_0) \notin r$

A distância entre o ponto T e a reta r é a medida do segmento perpendicular a reta r e que tem como extremidades um ponto de r e o ponto T .

Distância de Um Ponto a Uma Reta

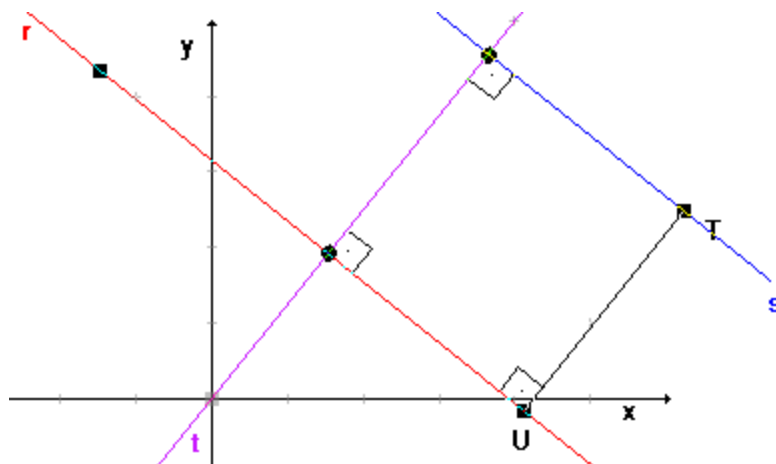


Passemos pelo ponto *T*
uma reta *s* paralela a *r*.

Como *s* é paralela a *r*
então sua equação é da
forma:

$$ax + by + c' = 0$$

Distância de Um Ponto a Uma Reta



Tracemos uma reta **t** perpendicular a reta **r**, perpendicular a reta **s** e que passe pela origem do sistema.

O coeficientes angulares de **r** e **s** são dados por: $m = -\frac{a}{b}$

Portanto o coeficiente angular de **t** deverá ser:

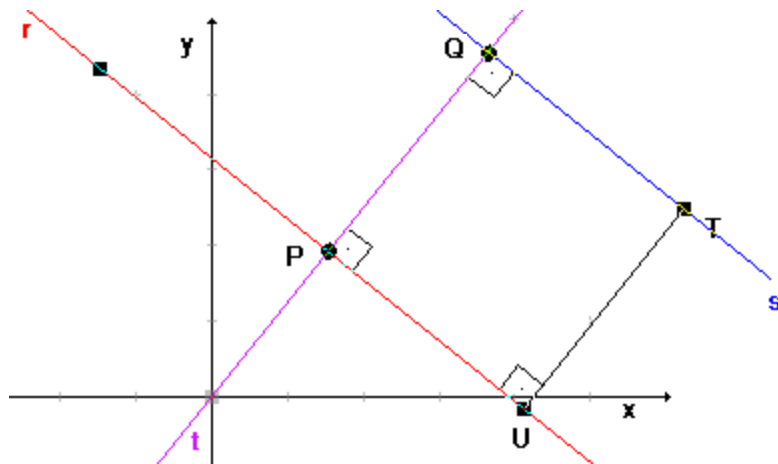
$$m_t \cdot m = m_t \cdot \left(-\frac{a}{b}\right) = -1 \Rightarrow m_t = \frac{b}{a}$$

Daí a equação reduzida da reta **t** é: $y = \frac{b}{a}x$

De onde se deduz a Equação Geral:

$$ay - bx = 0$$

Distância de Um Ponto a Uma Reta



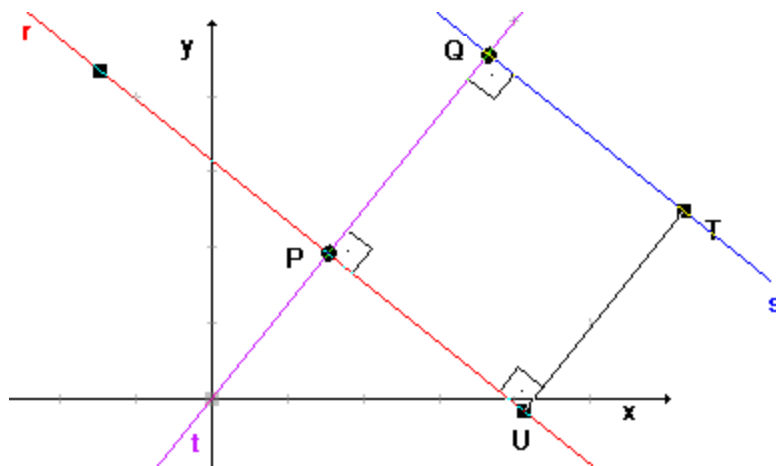
Observe que t intercepta r no ponto P e s no ponto Q .

O quadrilátero $PQTU$ é um retângulo, logo:

$$\overline{UT} = \overline{PQ} = d_{Tr}$$

$d_{Tr} \rightarrow$ Distância do ponto T a reta r .

Distância de Um Ponto a Uma Reta



Temos que:

$$\overline{PQ} = d_{PQ}$$

$d_{PQ} \rightarrow$ Distância entre os pontos P e Q .

Sendo: $P = (x_P, y_P)$ e $Q = (x_Q, y_Q)$

Sabemos que a distância entre P e Q é dada por:

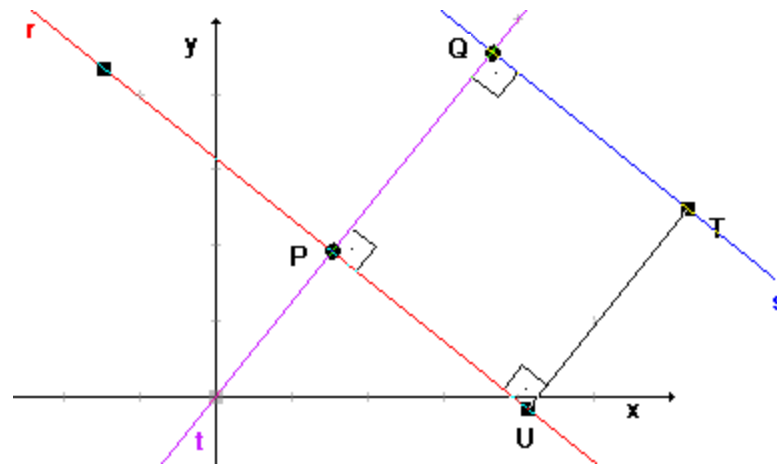
$$d_{PQ} = \sqrt{(x_P - x_Q)^2 + (y_P - y_Q)^2}$$

Distância de Um Ponto a Uma Reta

Determinação de
 x_P, y_P, x_Q, y_Q

Temos as retas:

$$\begin{cases} r: ax + by + c = 0 \\ s: ax + by + c' = 0 \\ t: ay - bx = 0 \end{cases}$$



$$P \rightarrow r \cap t \xrightarrow{\text{Solução do Sistema}} \begin{cases} r: ax + by + c = 0 \\ t: ay - bx = 0 \end{cases}$$

$$Q \rightarrow s \cap t \xrightarrow{\text{Solução do Sistema}} \begin{cases} s: ax + by + c' = 0 \\ t: ay - bx = 0 \end{cases}$$

Distância de Um Ponto a Uma Reta

Determinação de x_P, y_P

$$P \rightarrow r \cap t \xrightarrow{\text{Solução do Sistema}} \begin{cases} r: ax + by + c = 0 \\ t: ay - bx = 0 \end{cases}$$

$$ay - bx = 0 \Rightarrow ay = bx \Rightarrow y = (b/a)x \quad \text{I}$$

Substituindo I na equação de **r** :

$$ax + b \frac{b}{a} x + c = 0 \Rightarrow - \frac{\left(a^2 + b^2 \right)}{a} x = -c \Rightarrow x = - \frac{ac}{\left(a^2 + b^2 \right)}$$

Distância de Um Ponto a Uma Reta

Determinação de x_P, y_P

$$y = (b/a)x \quad \text{I}$$

Substituindo o valor de x na expressão I:

$$y = \frac{b}{a} \left[-\frac{ac}{a^2 + b^2} \right] \Rightarrow y = -\frac{bc}{a^2 + b^2}$$

Então temos:

$$x_P = -\frac{ac}{a^2 + b^2} \quad \text{e} \quad y_P = -\frac{bc}{a^2 + b^2}$$

Distância de Um Ponto a Uma Reta

Determinação de x_P, y_P

Logo:

$$P = \left(-\frac{ac}{a^2 + b^2}, -\frac{bc}{a^2 + b^2} \right)$$

Distância de Um Ponto a Uma Reta

Determinação de x_Q, y_Q

De Modo Similar, a partir do sistema:

$$Q \rightarrow s \cap t \xrightarrow{\text{Solução do Sistema}} \begin{cases} s: ax + by + c' = 0 \\ t: ay - bx = 0 \end{cases}$$

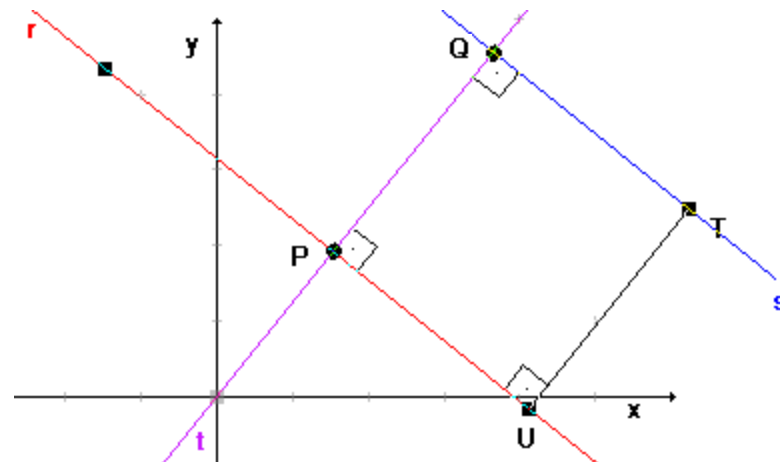
Determinamos:

$$Q = \left(-\frac{ac'}{a^2 + b^2}, -\frac{bc'}{a^2 + b^2} \right)$$

Distância de Um Ponto a Uma Reta

Determinação da distância entre P e Q

$$d_{PQ} = \sqrt{(x_P - x_Q)^2 + (y_P - y_Q)^2}$$



Substituindo os valores encontrados para

x_P, y_P, x_Q, y_Q temos:

$$d_{PQ} = \sqrt{\left(-\frac{ac}{a^2 + b^2} - \left(-\frac{ac'}{a^2 + b^2}\right)\right)^2 + \left(-\frac{bc}{a^2 + b^2} - \left(-\frac{bc'}{a^2 + b^2}\right)\right)^2}$$

Distância de Um Ponto a Uma Reta

Determinação da distância entre P e Q

$$d_{PQ} = \sqrt{\left(-\frac{ac}{a^2 + b^2} - \left(-\frac{ac'}{a^2 + b^2} \right) \right)^2 + \left(-\frac{bc}{a^2 + b^2} - \left(-\frac{bc'}{a^2 + b^2} \right) \right)^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow d_{PQ} = \sqrt{\left(\frac{-ac + ac'}{a^2 + b^2} \right)^2 + \left(\frac{-bc + bc'}{a^2 + b^2} \right)^2} \Rightarrow d_{PQ} = \sqrt{\left(\frac{(c' - c)a}{a^2 + b^2} \right)^2 + \left(\frac{(c' - c)b}{a^2 + b^2} \right)^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow d_{PQ} = \sqrt{\frac{(c' - c)^2 (a^2 + b^2)}{(a^2 + b^2)^2}} \Rightarrow$$

$$d_{PQ} = \sqrt{\frac{(c' - c)^2}{a^2 + b^2}}$$

Distância de Um Ponto a Uma Reta

Determinação da distância entre P e Q

$$d_{PQ} = \sqrt{\frac{(c'-c)^2}{a^2 + b^2}} \Rightarrow d_{PQ} = \frac{\sqrt{(c'-c)^2}}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

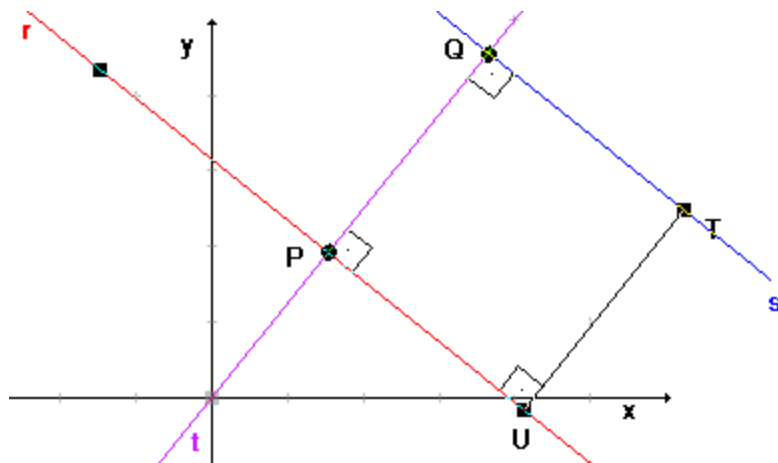
Onde: $\sqrt{(c'-c)^2} = |c'-c|$

Logo:

$$d_{PQ} = \frac{|c'-c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Distância de Um Ponto a Uma Reta

Determinação da distância entre T e r .



$$d_{Tr} = \overline{TU} = d_{PQ} = \frac{|c' - c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Considere $T = (x_0, y_0)$.

Como $T \in s$ então suas coordenadas satisfazem a equação da reta s : $ax_0 + by_0 + c' = 0$

Portanto: $c' = -ax_0 - by_0$

Distância de Um Ponto a Uma Reta

Determinação da distância entre T e r .

$$c' = -a x_0 - b y_0 \Rightarrow d_{Tr} = \frac{|-ax_0 - by_0 - c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow d_{Tr} = \frac{|-(ax_0 + by_0 + c)|}{\sqrt{a^2 + b^2}} \Leftrightarrow d_{Tr} = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

A distância de um ponto a uma reta é dada substituindo-se as coordenadas do ponto na equação da referida reta.

Distância de Um Ponto a Uma Reta

Nota sobre o Livro Texto

No livro a expressão da distância de um ponto a uma reta é dada por :

$$d_{Tr} = \frac{|ax_0 + by_0 - c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Então:

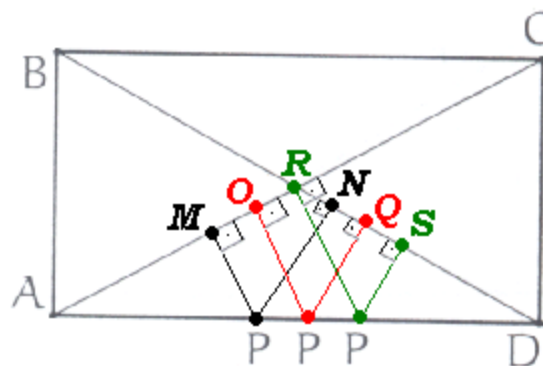
$$\frac{|ax_0 + by_0 - c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$



Explicação: O autor toma a equação
 $ax+by=c \Leftrightarrow ax+by-c=0$ para a reta.

Distância de Um Ponto a Uma Reta

Problema 1: O ponto P pertence a um lado de um retângulo. Provar que a soma das distâncias de P às diagonais desse retângulo é constante.



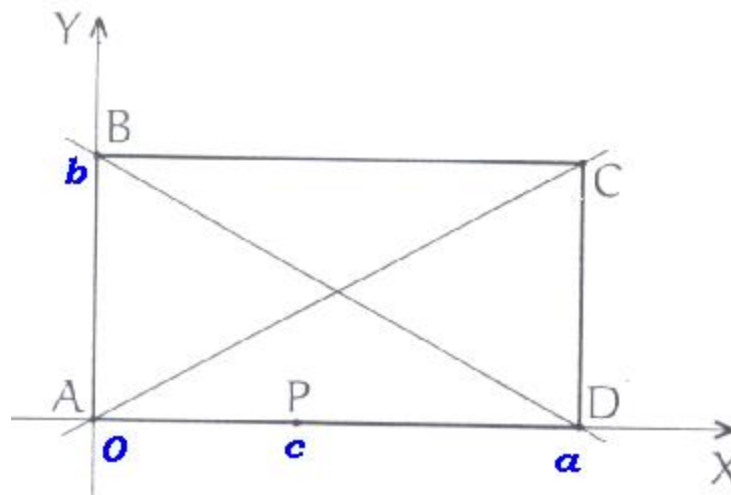
$$\overline{MP} + \overline{PN} = \overline{OP} + \overline{PQ} = \overline{RP} + \overline{PS} = \text{constante}$$

Distância de Um Ponto a Uma Reta

Solução do Problema 1:

Vamos considerar o retângulo $ABCD$ convenientemente posicionado nos eixos coordenados:

$$\left\{ \begin{array}{l} A = (0, 0) \\ B = (0, b), \quad b > 0 \\ C = (a, b), \quad a > 0 \\ D = (a, 0) \\ P = (c, 0), \quad 0 \leq c \leq a \end{array} \right.$$



O coeficiente angular da reta AC é: $m = \frac{b}{a}$

Como a reta AC passa pela origem, o termo independente da sua equação é igual a zero.

Daí, a forma geral da equação da reta AC é: $bx - ay = 0$

Solução do Problema 1 (continuação):

A equação segmentária da reta BD é: $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$

Mas: $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \Rightarrow bx + ay = ab \Rightarrow \boxed{bx + ay - ab = 0}$ 

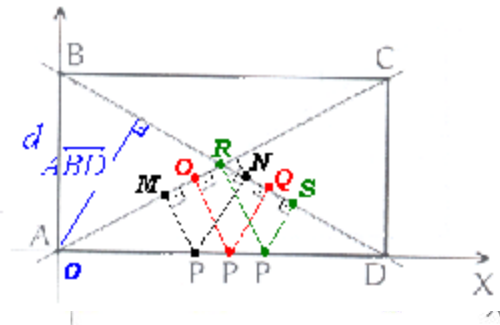
Forma Geral da Equação
da reta BD

Daí:

$$d_{\overrightarrow{PBD}} + d_{\overrightarrow{PAC}} = \frac{|bc + a0 - ab|}{\sqrt{a^2 + b^2}} + \frac{|bc - a0|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{ab}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \text{constante}$$

Observe que a constante encontrada é a distância do ponto A a reta BD :

$$d_{\overrightarrow{ABD}} = \frac{|b0 + x0 + ab|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{ab}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

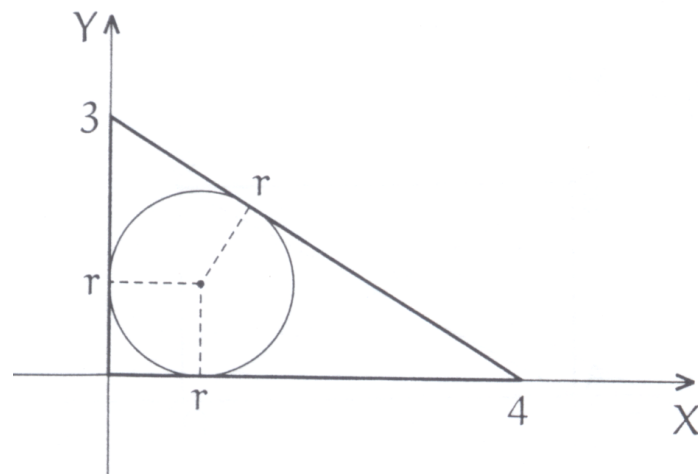


Distância de Um Ponto a Uma Reta

Problema 2: Determinar o raio da circunferência inscrita em um triângulo retângulo de catetos 3 e 4.

Solução:

Vamos considerar o triângulo em questão convenientemente posicionado nos eixos coordenados.



Solução do Problema 2 (continuação):

Na figura observamos que o centro da circunferência é o ponto (r, r) .

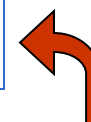
A reta que contém a hipotenusa possui equação segmentária:

$$\frac{x}{4} + \frac{y}{3} = 1$$

Daí: $3x + 4y = 12$



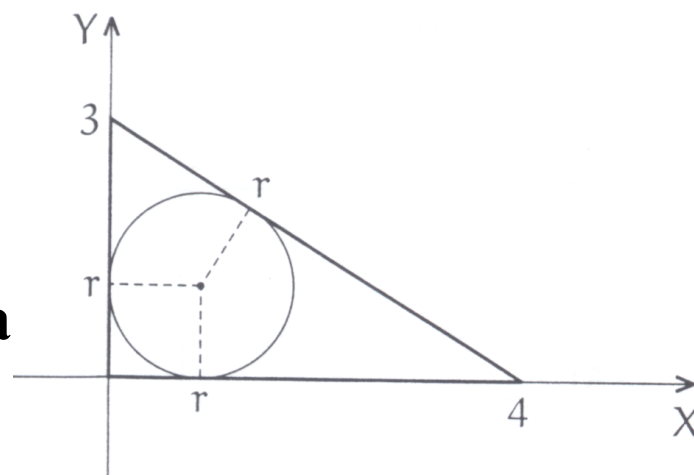
$$3x + 4y - 12 = 0$$



Forma Geral da Equação da reta

A distância do centro a hipotenusa deve ser igual a r , logo:

$$\frac{|3r + 4r - 12|}{\sqrt{4^2 + 3^2}} = r$$

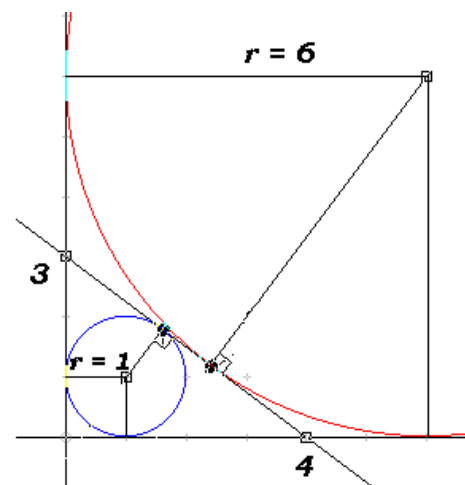


Solução do Problema 2 (continuação):

$$\frac{|3r + 4r - 12|}{\sqrt{4^2 + 3^2}} = r \quad \longrightarrow \quad |7r - 12| = 5r,$$

$$r = 1 \quad \text{ou} \quad r = 6$$

Observe na figura ao lado que existem duas circunferências, **de centro (r, r)** , cujos centros estão a uma distância r da hipotenusa.

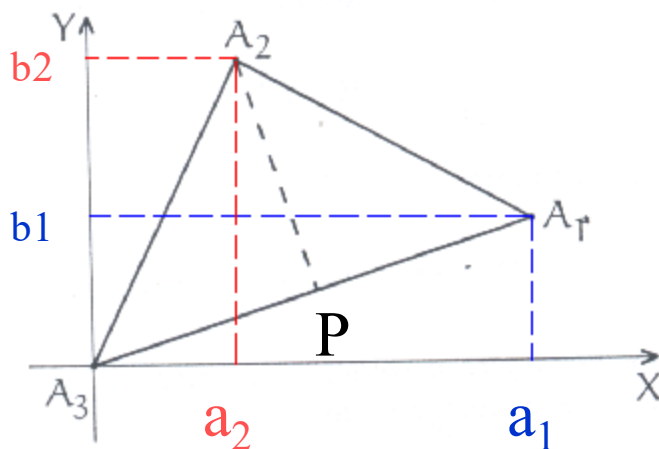


Como queremos a circunferência inscrita então:

$$r = 1$$

Área De Um Triângulo

Consideremos o triângulo $A_1A_2A_3$:



$$\left\{ \begin{array}{l} A_1 = (a_1, b_1) \\ A_2 = (a_2, b_2) \\ A_3 = (0, 0) \end{array} \right.$$

O lado A_1A_3 não é vertical, ou seja, $a_1 \neq 0$.

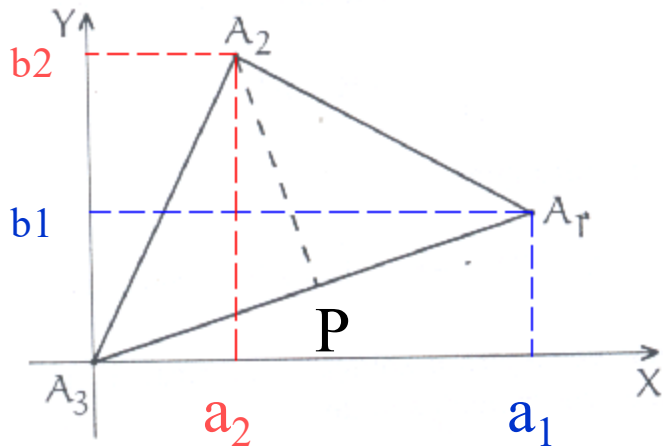
Consideremos A_1A_3 a base do triângulo.

Seja A_2P a altura relativa ao lado A_1A_3 .

Então a área do triângulo é dada por:

$$A = \frac{1}{2} \cdot \overline{A_3A_1} \cdot \overline{A_2P}$$

Área De Um Triângulo



Observe que a altura A_2P do triângulo é a distância do ponto A_2 a reta A_1A_3 .

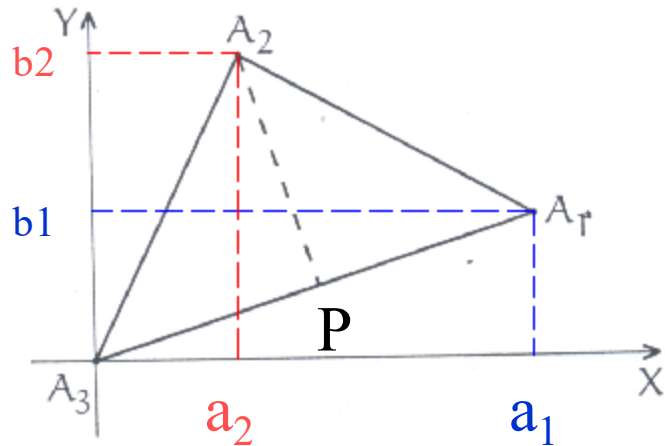
Temos que a A_1A_3 passa pela origem, logo a sua equação geral é:

$$b_1x - a_1y = 0$$

Portanto a distância do ponto A_2 a reta A_1A_3 é dada por :

$$d = \frac{|b_1a_2 - a_1b_2|}{\sqrt{b_1^2 + (-a_1)^2}} = \overline{A_2P}$$

Área De Um Triângulo



Observe, na figura, que o comprimento da base A_1A_3 é a distância entre os pontos A_1A_3 .

Daí: $\overline{A_1A_3} = \sqrt{(a_1 - 0)^2 + (b_1 - 0)^2} \Rightarrow \boxed{\overline{A_1A_3} = \sqrt{a_1^2 + b_1^2}}$

Área De Um Triângulo

Voltando a expressão da área do triângulo:

$$A = \frac{1}{2} \cdot \overline{A_3 A_1} \cdot \overline{A_2 P}$$

Sabemos que:

$$\overline{A_2 P} = \frac{|b_1 a_2 - a_1 b_2|}{\sqrt{b_1^2 + a_1^2}}$$

$$\text{e} \quad \overline{A_3 A_1} = \sqrt{a_1^2 + b_1^2}$$

Logo:

$$A = \frac{1}{2} \cdot \frac{|b_1 a_2 - a_1 b_2|}{\sqrt{b_1^2 + a_1^2}} \cdot \sqrt{a_1^2 + b_1^2} \Rightarrow$$

$$A = \frac{1}{2} \cdot |b_1 a_2 - a_1 b_2|$$

Área de um triângulo com um vértice na origem.

Área De Um Triângulo

$$A = \frac{1}{2} \cdot |b_1 a_2 - a_1 b_2|$$

Área de um triângulo com um vértice na origem.

Observe que:

$$|b_1 a_2 - a_1 b_2| = |-(a_1 b_2 - b_1 a_2)| = |a_1 b_2 - b_1 a_2|$$

Mas: $a_1 b_2 - b_1 a_2 = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$

Portanto:

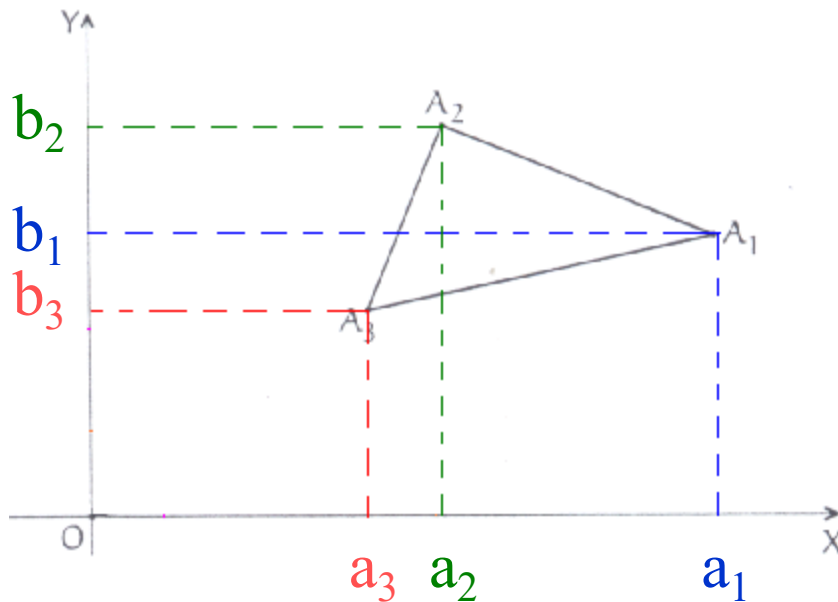
$$A = \frac{1}{2} \cdot \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}|$$

Área de um triângulo com um vértice na origem.

Área De Um Triângulo

Caso Geral

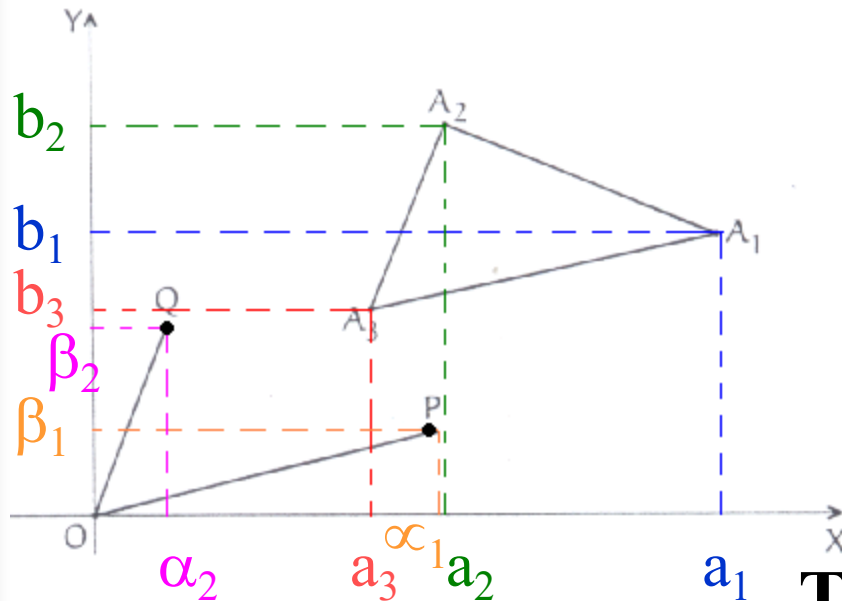
Consideremos o triângulo $A_1A_2A_3$:



$$\left\{ \begin{array}{l} A_1 = (a_1, b_1) \\ A_2 = (a_2, b_2) \\ A_3 = (a_3, b_3) \end{array} \right.$$

Área De Um Triângulo

Consideremos o triângulo $A_1A_2A_3$:



Tracemos o segmento OP equipolente a A_3A_1 .

Então se $P = (\alpha_1, \beta_1)$:

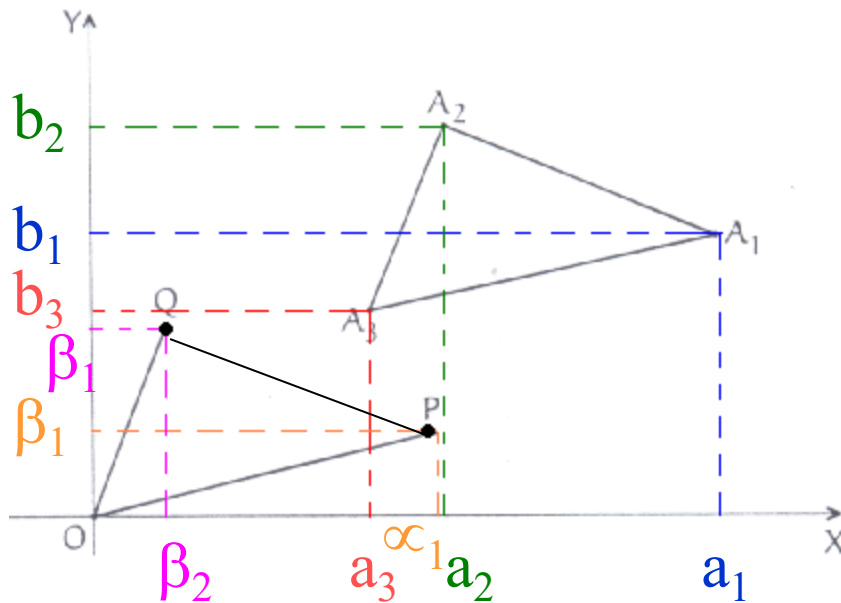
$$\begin{cases} \alpha_1 = a_1 - a_3 \\ \beta_1 = b_1 - b_3 \end{cases}$$

Tracemos o segmento OQ equipolente a A_3A_2 .

Então se $Q = (\alpha_2, \beta_2)$:

$$\begin{cases} \alpha_2 = a_2 - a_3 \\ \beta_2 = b_2 - b_3 \end{cases}$$

Área De Um Triângulo

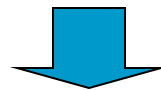


$$\begin{cases} \alpha_1 = a_1 - a_3 \\ \beta_1 = b_1 - b_3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha_2 = a_2 - a_3 \\ \beta_2 = b_2 - b_3 \end{cases}$$

Temos que:

$$\text{Área do } \Delta OPQ = A = \frac{1}{2} |\alpha_1 \beta_2 - \alpha_2 \beta_1|$$



$$A = \frac{1}{2} |(a_1 - a_3)(b_2 - b_3) - (a_2 - a_3)(b_1 - b_3)|$$

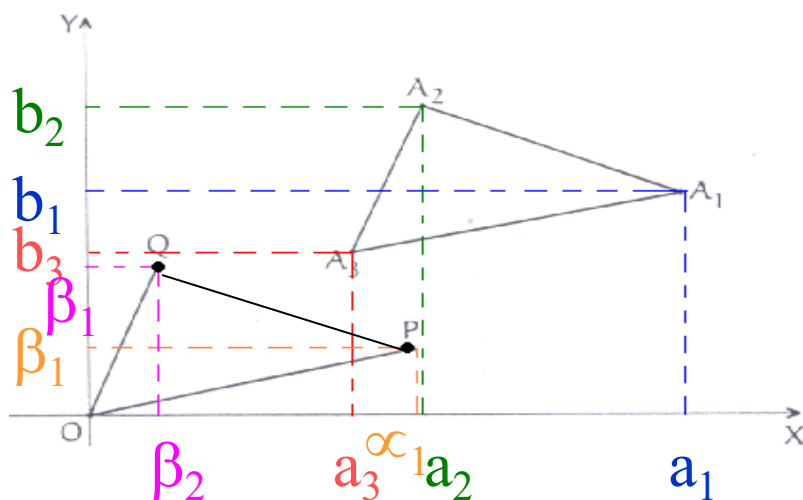
Área De Um Triângulo

Por construção:

$$\text{Área do } \Delta A_1A_2A_3 = \text{Área do } \Delta OPQ = A$$



$$A = \frac{1}{2} \left| (a_1 - a_3)(b_2 - b_3) - (a_2 - a_3)(b_1 - b_3) \right|$$



Área do
Triângulo

$\Delta A_1A_2A_3$

Área De Um Triângulo

Tomemos a expressão anterior:

$$A = \frac{1}{2} \left| (a_1 - a_3)(b_2 - b_3) - (a_2 - a_3)(b_1 - b_3) \right|$$

Consideremos o seguinte desenvolvimento:

$$\begin{aligned} & (a_1 - a_3)(b_2 - b_3) - (a_2 - a_3)(b_1 - b_3) = \\ & = a_1 b_2 - a_1 b_3 - a_3 b_2 + \cancel{a_3 b_3} - a_2 b_1 + a_2 b_3 + a_3 b_1 - \cancel{a_3 b_3} = \\ & = a_1 b_2 1 + a_2 b_3 1 + a_3 b_1 1 - a_3 b_2 1 - a_2 b_1 1 - a_1 b_3 1 = \end{aligned}$$

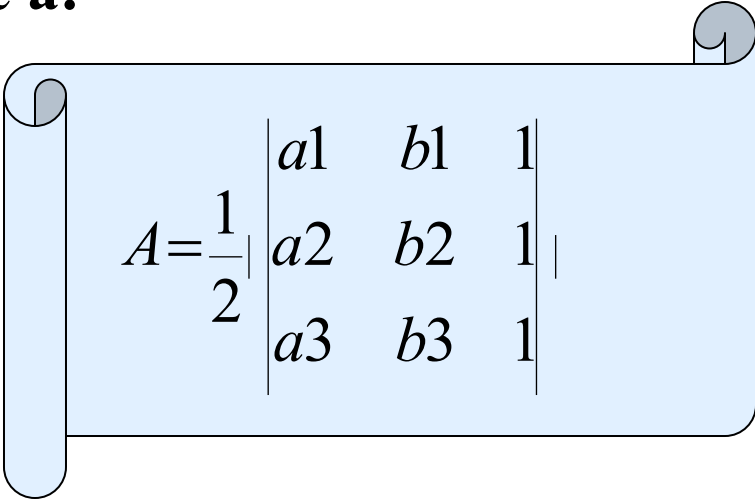
$$= \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & 1 \\ a_2 & b_2 & 1 \\ a_3 & b_3 & 1 \end{vmatrix}$$

Área De Um Triângulo

Então a expressão:

$$A = \frac{1}{2} \left| (a_1 - a_3)(b_2 - b_3) - (a_2 - a_3)(b_1 - b_3) \right|$$

É equivalente a:


$$A = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} a1 & b1 & 1 \\ a2 & b2 & 1 \\ a3 & b3 & 1 \end{vmatrix}$$

Área de Um Triângulo