

Universidade Federal da Bahia

Instituto de Matemática

Fundamentos de Matemática Elementar III

Imersão de $\mathbb{Z}$ em $\mathbb{Q}$

Robson Silva de Sousa

Heverton

REVISANDO

Conjunto dos Números Inteiros

Definição: Chama-se conjunto dos números inteiros, designado por $\mathbb{Z}$, ao conjunto de todas as classes $\overline{[a,b]}$, para qualquer $[a,b] \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

$$\mathbb{Z} = \left\{ \overline{[a,b]}; [a,b] \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \right\}$$

Imersão de $\mathbb{Z}$ em $\mathbb{Q}$

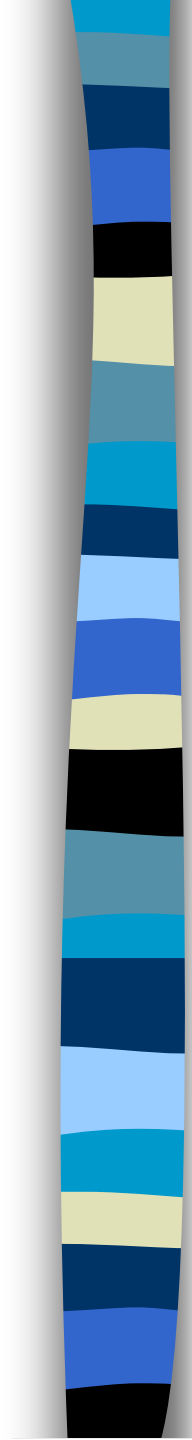
(Os Inteiros Como Particulares Números Racionais)

Seja $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Q}$ definida por:

$$f(m) = \frac{m}{1}, \quad \forall m \in \mathbb{Z}$$

Para essa aplicação vale as seguintes propriedades:

- $f(m) = f(n) \Rightarrow \frac{m}{1} = \frac{n}{1} \Rightarrow m = n$
portanto, f é injetora.
- Para quaisquer $m, n \in \mathbb{Z}$
$$f(m+n) = \frac{m+n}{1} = \frac{m}{1} + \frac{n}{1} = f(m) + f(n)$$
- Para quaisquer $m, n \in \mathbb{Z}$
$$f(m \cdot n) = \frac{m \cdot n}{1} = \frac{m}{1} \cdot \frac{n}{1} = f(m) \cdot f(n)$$
- Se $m \leq n$, então:
$$m \cdot 1 \leq n \cdot 1 \Rightarrow \frac{m}{1} \leq \frac{n}{1} \Rightarrow f(m) \leq f(n)$$



Essas propriedades de f significam que a imagem de Z por f , ou seja,

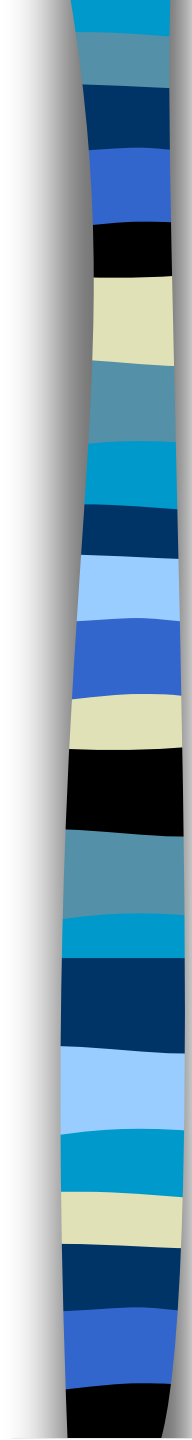
$$\text{Im}(f) = \left\{ \frac{m}{1} \mid m \in \mathbf{Z} \right\}$$

Pode ser vista como uma cópia de Z .

Devido a este fato cada inteiro m se confunde com sua imagem $\frac{m}{1}$ (ou seja,

$m = \frac{m}{1}$) e portanto Z passa a ser

identificado com $\text{Im}(f)$.



Como $\text{Im}(f) \subset Q$, então $Z \subset Q$.
Levando em conta que $\mathbb{N} \subset Z$, pode-se
concluir que $\mathbb{N} \subset Z \subset Q$.

**A função f é chamada
função imersão de Z em Q .**

Isso posto, se $m, n \in \mathbb{Z}$, $n \neq 0$ então:

$$m:n = \frac{m}{1} \cdot \frac{n}{1} = \frac{m}{1} \cdot \frac{1}{n} = \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$$

por outro lado, dado um número racional $\frac{m}{n}$, então:

$$\frac{m}{n} = \frac{m}{1} \cdot \frac{1}{n} = \frac{m:n}{1:1} = m:n$$

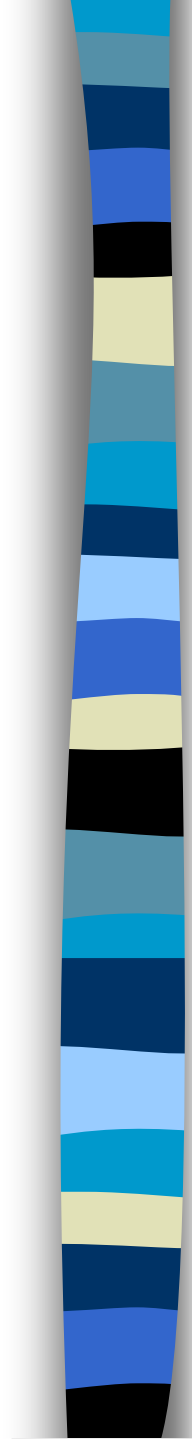
por isso chamamos cada representação $\frac{m}{n}$ ($m, n \in \mathbb{Z}$, $n \neq 0$)

de um número racional dado de fração ordinária de numerador m e denominador n .

Ainda considerando a fração $\frac{m}{n}$,

- Se $m \cdot d \cdot c(m, n) = 1$, a fração se diz irredutível.
- Se m é múltiplo de n , digamos $m = n \cdot r$ ($r \in \mathbb{Z}$), então:

$$\frac{m}{n} = \frac{m}{n} = \frac{nr}{n} = \frac{r}{1} = r$$


$$m \div n = \frac{m}{n} = \frac{nr}{n} = \frac{r}{1} = r$$

Isto significa que a divisão de um inteiro m por um inteiro $n \neq 0$ não só é sempre possível em $\mathbb{Q}$ como, quando m é múltiplo de n , o resultado coincide com o que se teria em $\mathbb{Z}$.

Proposição 1: Para quaisquer $a, b \in \mathbb{Q}$,
se $a < b$, então existe $c \in \mathbb{Q}$ para o qual vale $a < c < b$.

$$a, b \in \mathbb{Q}, \quad a < b \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} a+a < b+a \\ b+a < b+b \end{cases}$$

Daí:

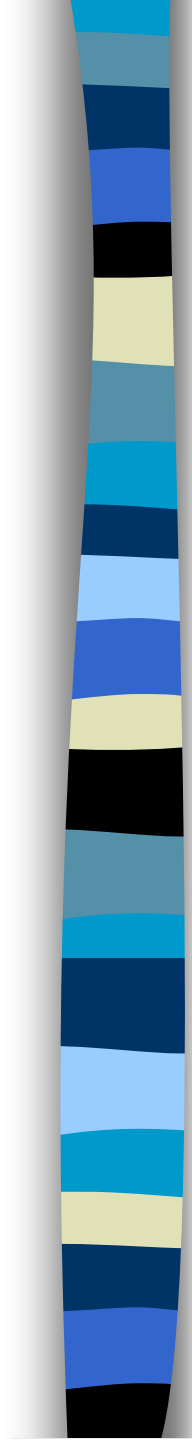
$$a+a < b+a < b+b \quad \Rightarrow \quad 2a < b+a < 2b$$

Logo Multiplicando por $\frac{1}{2}$ todos os membros
da última desigualdade:

$$\frac{1}{2}2a < \frac{1}{2}(b+a) < \frac{1}{2}2b \quad \Leftrightarrow \quad a < \frac{1}{2}(b+a) < b$$

Fazendo:

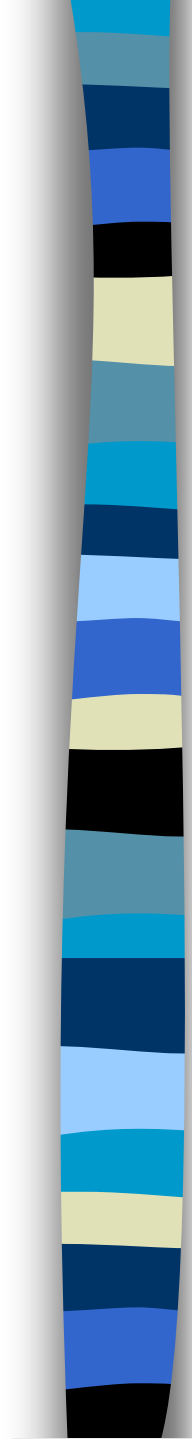
$$c = \frac{1}{2}(b+a) \quad \Rightarrow \quad c \in \mathbb{Q}$$



Corpo Denso

Definição: Um corpo K é dito *denso* se:

$$\forall a, b \in K, a < b, \exists c \text{ tal que } a < c < b$$



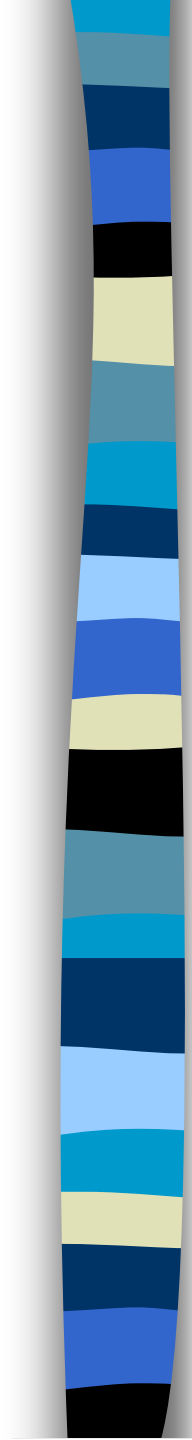
Corolário 1: Entre dois números racionais existem infinitos números racionais.

Consideremos os números racionais a e c da proposição 1.

Temos que:

$$a < c \Rightarrow \begin{cases} a+a < a+c \\ a+c < c+c \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2a < a+c < 2c$$



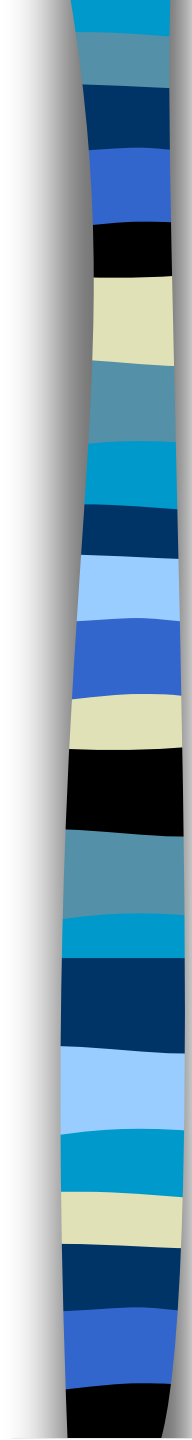
Pelo mesmo procedimento utilizado na proposição 1, é possível determinar o número:

$$d = \frac{1}{2}(a+c) \in \mathbb{Q}$$

Daí: $a < d < c < b$

Dessa maneira, poderemos continuar o processo infinitamente, logo, **existem infinitos números racionais entre dois números racionais a e b .**

Conclusão: O conjunto $\mathbb{Q}$ dos números racionais **é denso.**



Corolário 2: O conjunto dos elementos estritamente positivos de $\mathbb{Q}$ não tem mínimo.

Pela proposição 1:

$$0 < a \Rightarrow 0 < \frac{1}{2}(0 + a) < a \Rightarrow 0 < \frac{1}{2}a < a$$

Pelo Corolário 1:

$$0 < \dots < \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}a\right) < \frac{1}{2}a < a$$

Corpo Arquimadiano

Definição: Um corpo K é dito ser *Arquimadiano* se, para quaisquer $a, b \in K$, $b > 0$, existe $n \in \mathbb{N}^*$ de maneira que

$$nb = b + b + b + \dots + b + b > a$$

onde o número de parcelas b é n .

Proposição 2: Se a e b são números racionais e se $b > 0$, então existe $n \in \mathbb{IN}$ de maneira que $n.b > a$.

Suponhamos que: $a = \frac{r}{s}$ e $b = \frac{t}{s}$

Temos que: $b > 0 \Rightarrow s > 0$ e $t > 0$

Foi visto que: $\exists n \in \mathbb{N}^*$ tal que $nt > r$

Logo: $\frac{nt}{s} > \frac{r}{s}$

Mas: $\frac{nt}{s} = \frac{n}{1} \cdot \frac{t}{s} = n \frac{t}{s} \Rightarrow n \frac{t}{s} > \frac{r}{s} \Rightarrow nb > a$

Conclusão: O conjunto $\mathbb{Q}$ dos números racionais é Arquimediano.